数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 217-220

Properties of favorite points of random walk

東京工業大学理工学研究科数学専攻　岡田　いず海 *1
Graduate School of Science, Tokyo Institute of Technology

1. 序

本稿では[5], [6]にまとめた研究対象でもある $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークの訪問点集合の幾何学的特性を表す「訪問点集合の境界点」の長時間挙動について扱う.

例えばこの背景として，[1]のランダムウォークの訪問点集合 のエントロピーと境界点集合との関係性に関する評価がある．もともとランダムウォークの訪問点集合の個数の評価については[7]の中で大数の法則に相当する評価がしられており，またその大偏差原理に関する評価も[4]の中でしられている．本稿ではこれらの結果に対応する境界点の個数に関する結果を紹介する．(定理3.1，定理3.2)

また，[3]では「シンプルランダムウォークの訪問点集合の中で最大で何回訪問されているのか？」という問題が提唱されている．[3]では3次元以上のシンプルランダムウォークの最大訪問回数は $\log n$ のオーダーである値に確率1で収束することが示されている．また，2次元のシンプルランダムウォークのオーダーは $(\log n)^2$ のオーダーになり相転移を起こすことが示された一方，その定数係数は未解決問題であった．その約40年後[2]で[3]の予想を肯定的に解決している．本稿では境界点の中で最大訪問回数を考えたとき，2次元と3次元の間で相転移をおこさずに $\log n$ のオーダーの値に収束するという結果を紹介する．(定理3.3)

2. 定義

$\mathbb{Z}^d$ 上のi.i.d.な確率変数列の和を $\mathbb{Z}^d$ 上の原点出発のランダムウォーク $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ として考える．時間 n までの訪問点集合として $R(n)=\{S_0,S_1,...,S_n\}$ とする．このとき $a\in\mathbb{Z}^d$ に対して $\mathcal{N}(a)$ を a の近傍の点の集合とする．すなわち，

$$\mathcal{N}(a)=\{z\in\mathbb{Z}^d:|a,z|=1\}$$

である．また，ステップ n までの訪問点集合の境界点集合を $\partial R(n)$ とする．すなわち，

$$\partial R(n)=\{S_i:0\leq i\leq n, R(n)\not\supset\mathcal{N}(S_i)\}$$

である．さらに，ステップ n での境界点の個数として

$$L_n=\sharp\partial R(n)$$

と定義する．また，次のように多重点と $\partial R(n)$ の共通集合の濃度を定義する:

$$L_n^{(p)}=\sharp\{S_i\in\partial R(n):\sharp\{m:0\leq m\leq n, S_m=S_i\}=p\}.$$

3. 主結果

$\{S'_m\}_{m=0}^{\infty}$ を $\{S_m\}_{m=0}^{\infty}$ と独立なdual walkとする.

*1 e-mail: okada.i.aa@m.titech.ac.jp

定理 3.1. 任意のランダムウォーク $(d \geq 1)$ に対して,

$$q = P(\{S_m\}_{m=0}^{\infty} \cup \{S'_m\}_{m=0}^{\infty} \not\supset \mathcal{N}(0), 0 \notin \{S_m\}_{m=1}^{\infty})$$

としたとき, 確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{n} = q$$

が成立する. また, $L_n^{(p)}$ についてもこの定理に相当する評価を得た.

定理 3.2. 既約なランダムウォーク $(d \geq 2)$ において, 任意の $x \in [0,1]$ に対して

$$\psi(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \log P(L_n \geq nx)$$

が存在する. このとき $[0,q]$ 上で $\psi(x) = 0$ であり, $(q,1]$ 上で $0 < \psi(x) < \infty$ である. また, $[0,1]$ 上で連続かつ *convex* であり, $[q,1]$ 上で狭義単調増加である.

$K_d(n;x)$ を d 次元シンプルランダムウォークがステップ n までに x を訪問する回数とする. (すなわち $K_d(n;x) = \sum_{j=0}^{n} 1_{\{S_j=x\}}$ である.) さらに, ステップ n での境界点の中での最大訪問回数として

$$M_d(n) := \max_{x\in\partial R(n)} K_d(n;x)$$

と定義する.

定理 3.3. シンプルランダムウォーク $(d \geq 2)$ を考える. $b \in \mathcal{N}(0)$ に対して

$$T_a = \inf\{j \geq 1 : S_j = a\}, \quad \beta_d = -\frac{1}{\log P(T_0 < T_b)}$$

とする. このとき確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_d(n)}{\log n} = \beta_d \tag{1}$$

が成立する. さらに,

$$\Theta_n(\delta) = \sharp\{x \in \partial R(n) : \frac{K_d(n;x)}{\log n} \geq \beta_d \delta\}$$

としたとき, 任意の $0 < \delta < 1$ に対して確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \Theta_n(\delta)}{\log n} = 1 - \delta \tag{2}$$

が成立する.

4. Theorem 3.3 の証明の鍵となる idea と補題

(1) と (2) の証明はほとんど同じ考えを用いているので，(1) の証明のみを紹介する．初めに upper bound の証明について述べる．これは [3] の証明を参考にしている．ただし，[3] の評価と違って，$M_d(n)$ は n に対して単調増加でないことに注意する．もともと Borel-Cantelli の補題を適用するためには時間 2^k のときの評価が必要である．単調増加であれば，時間 2^k のときに $M_d(n)$ が upper bound を持つという事象から，時間 n で upper bound を持つという事象に自然に拡張できる．よって，証明のなかでは単調増加である $\max_{l\leq n} M_d(l)$ について評価している．次に lower bound の証明のおおまかな流れについて述べる．$\beta < \beta_d$ を固定する．$u_n = \lceil \exp(n^2) \rceil$ に対して，

$$Q_n = \sharp\{x \in R(u_{n-1}) \cap \partial R(u_n), K_d(u_{n-1}; x) \geq \beta n^2\}$$

と定義する．これについて下のような Chebyshev の補題を考える．

$$P(|Q_n - EQ_n| > \frac{EQ_n}{2}) \leq \frac{4\mathrm{Var}(Q_n)}{(EQ_n)^2}.$$

従って次の補題を考えている．

補題 4.1. 次を満たす $c > 0$ と $h > 0$ が存在する．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次が成立する．

(i) $d = 2$ のとき，

$$EQ_n \geq \frac{c\exp(hn^2 - 2n)}{n^4}.$$

(ii) $d \geq 3$ のとき，

$$EQ_n \geq c\exp(hn^2 - 2n).$$

補題 4.2. 次を満たす $C > 0$ と $h > 0$ が存在する．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次が成立する．

(i) $d = 2$ のとき，

$$\mathrm{Var}(Q_n) \leq C\left(\frac{\exp(hn^2 - 2n)}{n^4}\right)^2 \frac{\log n}{n^2}.$$

(ii) $d \geq 3$ のとき，

$$\mathrm{Var}(Q_n) \leq C\exp(2hn^2 - 4n) \times \frac{1}{n^{10}}.$$

上の補題4.2について，3次元以上のときは一様に評価できたのに対し，2次元のときは別証明が必要であった．さらに，

$$L_d(n) := \max_{x\in R(u_{n-1})\cap\partial R(u_n)} K_d(u_{n-1}; x)$$

と定義したとき，上の評価を合わせると Borel-Cantelli の補題より確率1で，十分大きい n に対して

$$L_d(n) \geq \beta n^2$$

を得る．一般的に $u_{m-1} \leq n < u_m$ を満たす任意の $m,\, n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$R(u_{m-1}) \cap \partial R(u_m) \subset \partial R(n)$$

が成立するので，$L_d(m) \leq M_d(n)$ が従う．従って確率 1 で

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_d(n)}{\beta \log n} \geq \liminf_{m\to\infty} \frac{L_d(m)}{\beta \log u_m} \geq 1$$

が成立することで lower bound を得る．

参考文献

[1] Benjamini,I. and Kozma,G. and Yadin,A. and Yehudayoff,A.(2010). Entropy of random walk range. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.Volume 46, Number 4, 1080-1092.

[2] Dembo,A. and Peres,Y. and Rosen,J. and Zeitouni,O.(2001). Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. Acta Math. 186, 239-270.

[3] Erdős,P. and Taylor, S.J. (1960). Some problems concerning the structure of random walk paths. Acta Sci. Hung. 11,137-162.

[4] Hamana,Y. and Kesten,H.(2001). A large-deviation result for the range of random walk and for the Wiener sausage. Prob. Theory and Related Fields, June, Volume 120, Issue 2, 183-208.

[5] Okada,I. (2014). The inner boundary of random walk range. J. Math. Soc. Japan, to appear.

[6] Okada,I. (2014). Frequently visited sites of the inner boundary of random walk range. Preprint.

[7] Spitzer,F.(1976). Principles of Random Walk.Springer,Berlin.